

Α' Λυκείου

Θέματα προαγωγικών εξετάσεων στη Γεωμετρία

Θέμα Α

A1. Να αποδείξετε ότι η διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ορθογωνίου τριγώνου, ισούται με το μισό της υποτείνουσας.

μονάδες 15

A2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

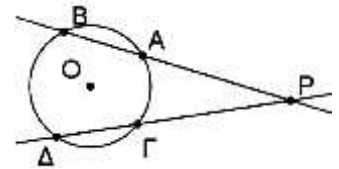
- α)** Κάθε σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της.
- β)** Στο ισοσκελές τρίγωνο κάθε διάμεσός του είναι ύψος και διχοτόμος
- γ)** Σε κάθε ρόμβο οι διαγώνιες είναι ίσες.
- δ)** Η διάμεσος κάθε τραπεζίου ισούται με το άθροισμα των βάσεων του.
- ε)** Το τετράγωνο είναι και ρόμβος.



μονάδες 5x2

Θέμα Β

Έστω κύκλος κέντρου O και P ένα σημείο στο εξωτερικό του. Από το P φέρουμε ευθείες που τέμνουν τον κύκλο στα σημεία A, B, Γ, Δ όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα έτσι ώστε $PA = P\Gamma$.



B1. Να δείξετε ότι η OP είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{AP\Gamma}$.

μονάδες 7

B2. Να δείξετε ότι το O ισαπέχει από τα AB και $\Gamma\Delta$.

B3. Να δείξετε ότι $AB = \Gamma\Delta$.

μονάδες 6

μονάδες 6

B4. Έστω ότι η OP τέμνει το τόξο $A\Gamma$ στο K . Θεωρούμε την εφαπτομένη του κύκλου στο K που τέμνει τις δύο ευθείες στα H και Θ . Να δείξετε ότι το τρίγωνο $PH\Theta$ είναι ισοσκελές.

μονάδες 6

Θέμα Γ

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και έστω $B\Delta$, ΓE ύψη του. Να αποδείξετε ότι:

Γ1. $B\Delta = \Gamma E$

μονάδες 8

Γ2. Το τρίγωνο $A\epsilon\Delta$ είναι ισοσκελές.

μονάδες 8

Γ3. $\widehat{B} = \widehat{A\epsilon\Delta} = 90^\circ - \frac{\widehat{A}}{2}$



μονάδες 9

Θέμα Δ

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και έστω Δ, E, Z τα μέσα των πλευρών του $AB, B\Gamma, \Gamma A$ αντίστοιχα.

Προεκτείνουμε το τμήμα ΔE κατά $E\Theta = \Delta E$. Να αποδείξετε ότι:

Δ1. $A\Gamma = 2\Delta E$

μονάδες 5

Δ2. Το τετράπλευρο $A\Delta\Theta\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο.

μονάδες 5

Δ3. Τα τμήματα $A\Theta$, $\Delta\Gamma$, EZ συντρέχουν σε σημείο K .

μονάδες 8

Δ4. $KZ = \frac{1}{4} A\Gamma$.

μονάδες 7



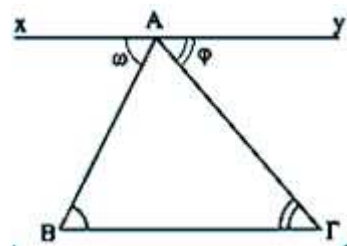
Λύσεις

Θέμα Α

A1. Από μια κορυφή, π.χ. την Α, φέρουμε ευθεία $xy \parallel BG$. Τότε $\omega = \hat{B}$ (1) και $\varphi = \hat{G}$ (2), ως εντός και εναλλάξ των παραλλήλων xy και BG με τέμνουσες AB και AG αντίστοιχα.

Αλλά $\omega + \hat{A} + \varphi = 2\angle$ (3).

Από τις (1), (2) και (3) προκύπτει ότι $\hat{A} + \hat{B} + \hat{G} = 2\angle$



A2. α) Σ β) Λ γ) Λ δ) Λ ε) Σ



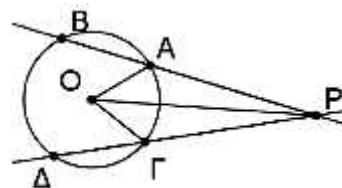
Θέμα Β

B1. Τα τρίγωνα OAP και OPG έχουν:

- i. OP κοινή πλευρά
- ii. $PA = PG$
- iii. $OA = OG$ ακτίνες του κύκλου.

Λόγω του κριτηρίου ΠΠΠ τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $\hat{OPA} = \hat{OPG}$.

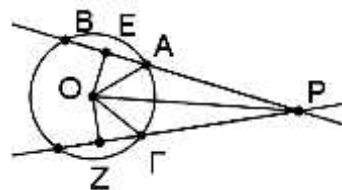
Άρα OP είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{APG}$.



B2. Εστω $OE \perp AB$ και $OZ \perp \Gamma\Delta$. Τα ορθογώνια τρίγωνα PEO και PZO έχουν:

- i. OP κοινή πλευρά και
- ii. $\hat{OPA} = \hat{OPG}$

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $OE = OZ$.



B3. Επειδή τα OE και OZ είναι αποστήματα των χορδών AB και $\Gamma\Delta$ και σε ίσα αποστήματα αντιστοιχούν ίσες χορδές, είναι $AB = \Gamma\Delta$.

B4. Στο τρίγωνο $PH\Theta$ η PK είναι διχοτόμος και ύψος οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές.



Θέμα Γ

Γ1. Τα ορθογώνια τρίγωνα $BE\Gamma$ και $B\Delta\Gamma$ έχουν τη $B\Gamma$ κοινή πλευρά και $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ (στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$), οπότε είναι ίσα. Άρα και $B\Delta = \Gamma E$.

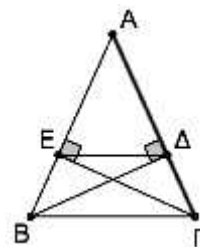
Γ2. Επειδή τα τρίγωνα $BE\Gamma$ και $B\Delta\Gamma$ είναι ίσα έχουν και $BE = \Gamma\Delta$. Όμως $AB = A\Gamma$, άρα $AB - BE = A\Gamma - \Gamma\Delta \Leftrightarrow AE = A\Delta$, οπότε το τρίγωνο $AE\Delta$ είναι ισοσκελές.

Γ3. Στο ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει ότι:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{B} = 180^\circ - \hat{A} \Leftrightarrow \hat{B} = \frac{180^\circ}{2} - \frac{\hat{A}}{2} \Leftrightarrow \hat{B} = 90^\circ - \frac{\hat{A}}{2}$$

Στο ισοσκελές τρίγωνο $A\Delta E$ ισχύει ότι:

$$\hat{A} + \hat{A\hat{E}} + \hat{A\hat{E}\Delta} = 180^\circ \Leftrightarrow 2\hat{A\hat{E}\Delta} = 180^\circ - \hat{A} \Leftrightarrow \hat{A\hat{E}\Delta} = \frac{180^\circ}{2} - \frac{\hat{A}}{2} \Leftrightarrow \hat{A\hat{E}\Delta} = 90^\circ - \frac{\hat{A}}{2}$$



Θέμα Δ

Δ1. Επειδή τα Δ, Ε είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΒΓ, ισχύει ότι:

$$\Delta E // A\Gamma \text{ και } \Delta E = \frac{A\Gamma}{2} \Leftrightarrow 2\Delta E = A\Gamma$$

Ασκησόπολις
ο πιο πλούσιος κόσμος
θεμάτων και ασκήσεων

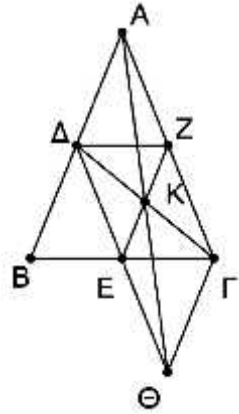
Δ2. Είναι $\Delta\Theta = 2\Delta E = A\Gamma$ και $\Delta\Theta // A\Gamma$, οπότε το τετράπλευρο ΑΔΘΓ είναι παραλληλόγραμμο γιατί δύο απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες.

Δ3. Επειδή $\Delta E = \frac{A\Gamma}{2} = Z\Gamma$ και $\Delta E // Z\Gamma$ το τετράπλευρο ΔΕΓΖ είναι

παραλληλόγραμμο γιατί δύο απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες.

Οι ΔΓ, ΕΖ είναι διαγώνιες του παραλληλογράμμου, οπότε διχοτομούνται σε σημείο Κ.

Οι ΔΓ, ΑΘ είναι διαγώνιες του παραλληλογράμμου ΑΔΘΓ, οπότε διχοτομούνται. Όμως το μέσο της ΔΓ είναι το Κ, άρα είναι μέσο και της ΑΘ, οπότε οι ΑΘ, ΔΓ, ΕΖ συντρέχουν στο Κ.



Δ4. Τα Ε, Ζ είναι μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΒΓ, οπότε $EZ = \frac{AB}{2} \Leftrightarrow 2KZ = \frac{AB}{2} \Leftrightarrow KZ = \frac{AB}{4} \stackrel{AB=A\Gamma}{=} \frac{A\Gamma}{4}$